NT 207

Cálculo da probabilidade de se encontrar uma (ou mais) vaga de zona azul desocupada.

Engº Sun Hsien Ming

1. Introdução

Este trabalho foi extraído do estudo desenvolvido e encaminhado à GER para atender solicitação da diretoria da CET para encontrar um índice de controle que medisse o grau de facilidade de se encontrar uma vaga desocupada de zona azul, de forma a poder monitorar e acompanhar a evolução do nível de desempenho das áreas de zona azul críticas em termos de disponibilidade de vagas. O índice de controle também permitiria medir a eficiência de medidas a serem aplicadas para melhorar a disponibilidade de vagas. A eficiência das medidas poderá ser avaliada mediante a comparação do índice de controle obtido antes e após a aplicação das medidas.

O índice de controle encontrado para medir a disponibilidade de vagas desocupadas é a probabilidade de se encontrar uma ou mais vagas desocupadas.

O trabalho foi baseado em um exemplo que mostra os resultados de 4 quadras contendo 48 vagas de estacionamento de 1 hora em *Westwood Blvd*, nos EUA (Exemplo 8 – "*Vacant Parking Spaces*"), constante no livro *Poisson and Other Distribution in Traffic* de *ENO Foundation for Transportantion* – *Saugatuvk* – 1971 – *Connecticut*.

2. Base Teórica

Nesta seção será dado apenas um apanhado geral da fundamentação teórica extraída do livro acima referido.

Dada uma amostra, definem-se a média m, o tamanho da amostra n e a variância s^2 como sendo:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{g} f_i x_i}{n} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{g} f_i = n \quad (2)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{g} f_i (x_i)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{g} (f_i x_i)\right]^2}{n-1} \quad (3)$$

onde f_i é a frequência observada e g é o número de agrupamentos da amostra.

2.1. Distribuição de Poisson

Normalmente a amostra obtida a partir da pesquisa de campo obedece a uma distribuição de Poisson. Na distribuição de Poisson, a probabilidade de ocorrer x vagas desocupadas – $P(x)$ – é dada pela expressão:

$$P(x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!} \quad (4)$$

onde:

x é o número de vagas desocupadas
m é a média
e é a base do logaritmo neperiano
$x!$ representa fatorial de x

A probabilidade de ocorrer 0 (zero) vagas desocupadas ($x = 0$) é:

$$P(0) = e^{-m} \quad (5)$$

Dessa forma, a probabilidade de se ter uma ou mais vagas desocupadas é:

$$P(x \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-m} \quad (6)$$

Entretanto, antes é necessário verificar se a amostra realmente segue a distribuição de Poisson.

Para tanto, faz-se o teste de Qui-quadrado. Calcula-se o Qui-quadrado da amostra χ^2 e compara-se com o Qui-quadrado teórico com um nível de erro de 5% $\left(\chi^2_{0,05}\right)$.

O valor de Qui-quadrado da amostra é obtido pela expressão:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{g} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} \qquad (7)$$

onde:

χ^2 é o Qui-quadrado da amostra
n é o tamanho da amostra
f_i é a frequência observada
F_i é a frequência teórica dada pela distribuição

A expressão (7) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{g} \frac{(f_i)^2}{F_i} - n \qquad (8)$$

O valor da frequência teórica F_i é obtido pela expressão:

$$F_i = nP(x_i) \qquad (9)$$

O valor de Qui-quadrado teórico com nível de erro de 5% é obtido em tabelas estatísticas em função do grau de liberdade $g.l$.

O grau de liberdade $g.l$ na distribuição de Poisson é dado por:

$$g.l. = g - 2 \qquad (10)$$

onde g é o número de agrupamentos da amostra.

Se o Qui-quadrado da amostra for menor do que o Qui-quadrado teórico com nível de 5% de erro, então se pode afirmar, com um erro de 5%, que a amostra segue a distribuição de Poisson, isto é, a amostra obedecerá à distribuição de Poisson se:

$$\chi^2 < \chi^2_{0,05} \qquad (11)$$

2.2. Distribuição Binomial Negativa

Na distribuição de Poisson teórica, a variância s^2 deve ser igual à média m. Na prática, s^2 não é exatamente igual à média m, mas deverá ser um valor próximo.

No caso de amostras com alta variabilidade (variância muito maior do que a média), a amostra poderá não seguir a distribuição de Poisson. Neste caso, pode-se tentar uma distribuição Binomial Negativa, também conhecida como distribuição de Pascal. A probabilidade numa distribuição binomial-negativa é calculada pela expressão:

$$P(x) = C_{k-1}^{x+k-1} p^k q^x \tag{12}$$

onde

$$C_{k-1}^{x+k-1} = \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{(x+k-1)!}{(k-1)!x!} \tag{13}$$

Sendo m e s^2 a média e a variância da amostra:

$$p = \frac{m}{s^2} \tag{14}$$

$$k = \frac{m^2}{s^2 - m} \tag{15}$$

$$q = (1-p) \tag{16}$$

Como o valor de k dado pela expressão (15) não é um número inteiro, não é possível calcular a probabilidade utilizando diretamente a expressão (12) por envolver fatorial de números não inteiros. Para tanto, pode-se utilizar a função fatorial generalizada, também conhecida como função gama, $\Gamma(z)$, dada pela expressão:

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \int_0^\infty e^{-x} x^z dx \tag{17}$$

Um método para calcular os valores de $\Gamma(z)$ é utilizar a função LNGAMA do aplicativo EXCEL, fazendo-se:

$$\Gamma(z) = EXP(LNGAMA(z+1)) \tag{18}$$

Uma alternativa para calcular a probabilidade $P(x)$ sem o uso da função GAMA é o uso das seguintes fórmulas recorrentes:

$$P(0) = p^k \tag{19}$$

$$P(x+1) = \frac{x+k}{x+1} q P(x) \tag{20}$$

A probabilidade de se encontrar uma ou mais vagas é dada por:

$$P(x \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - p^k \tag{21}$$

Para verificar se a amostra segue a distribuição Binomial Negativa, faz-se o teste de Qui-quadrado, conforme já descrito para distribuição de Poisson, com a diferença de que o grau de liberdade $g.l.$ é dado por:

$$g.l. = g - 3 \tag{22}$$

2.3. Um guia para a escolha do tipo de distribuição

Dada uma amostra, pode-se ter dúvida de qual a distribuição melhor se adapta à amostra. A Tabela 1 é uma orientação do tipo de distribuição mais usual a cada tipo de situação.

Tabela 1

s^2/m	**Situação em que condição pode ocorrer**	**Distribuição sugerida**
$\gg 1$	(i) Flutuação cíclica (ii) Variação no valor da média	Binomial Negativa
≈ 1	Comportamento aleatório	Poisson
$\ll 1$	Fluxo congestionado	(i) Distribuição de Poisson Generalizada (ii) Distribuição Binomial

Neste trabalho não serão tratadas a distribuição de Poisson Generalizada e a distribuição Binomial.

3. Estudo de *Westwood BLVD*

As pesquisas de campo realizadas em *Westwood Blvd.* (4 quadras) consistiram em observações feitas das 14 às 16 horas de segunda-feira a sexta-feira. Os períodos de observação são intervalos de 5 minutos. Uma observação foi feita durante cada intervalo. O exato instante de observação dentro do intervalo de 5 minutos é aleatório. Cada observação consistiu de uma contagem instantânea do número de vagas desocupadas. Assim, tem-se um total de 24 intervalos por dia, totalizando 120 intervalos por semana nos 5 dias da semana. Como o teste de Qui-quadrado χ^2 indicou, neste caso os dados observados apresentam boa aderência aos dados teóricos de uma distribuição de Poisson.

Tabela 2 – *Westwood*

<table>
<tr><th>Número de vagas desocupadas</th><th colspan="2">Frequência observada (f_i)</th><th colspan="2">Frequência teórica (Poisson) (F_i)</th><th>$(f_i)^2/F_i$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>29</td><td></td><td>25,1</td><td></td><td>33,5</td></tr>
<tr><td>1</td><td>42</td><td></td><td>39,3</td><td></td><td>44,9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>21</td><td></td><td>30,1</td><td></td><td>14,7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>16</td><td></td><td>16,4</td><td></td><td>15,6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7</td><td rowspan="4">12</td><td>6,4</td><td rowspan="4">9,1</td><td rowspan="4">15,8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>≥ 7</td><td>0</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>120</td><td></td><td>120</td><td></td><td>124,5</td></tr>
</table>

Da Tabela 2 verifica-se que $n = 120$ e $g = 5$ (5 agrupamentos). Valores pequenos de F_i devem ser agrupados para o teste de Qui-quadrado. Dessa forma, os 8 agrupamentos iniciais ficam reduzidos a 5. Utilizando-se as expressões (1), (3), (8), (10) e (6), obtém-se, pela ordem:

$m = 1{,}567$
$s^2 = 2{,}063$
$\chi^2 = 4{,}5$
$g.l. = 3$
$P(x \geq 1) = 0{,}791$

A razão s^2/m é $1{,}317$.

Com $g.l. = 3$, de tabelas estatísticas obtém-se $\chi^2_{0,05} = 7{,}81$.

Como $\chi^2 < \chi^2_{0,05}$, a amostra segue a distribuição de Poisson com um nível de erro de 5%. A probabilidade de se encontrar uma ou mais vagas desocupadas nas 4 quadras do estudo nos horários pesquisados é de 79,1%.

4. Pesquisa Piloto

Para subsidiar o desenvolvimento da metodologia, foram realizadas duas pesquisas piloto na área 11 – Oriente, uma na Rua Miller, no trecho entre a Rua Conselheiro Belisário e a Rua Oriente e a segunda pesquisa foi realizada na Rua Conselheiro Belisário, trecho entre a Rua Miller e a R. Maria Marcolina. As pesquisas foram realizadas em 5 dias úteis, no período de 27/01/2000 a 02/02/2000 (quinta a quarta feira), das 11 às 13 horas. As duas pesquisas não seguiram a distribuição de Poisson (como no exemplo da *Westwood Blvd.*), tendo sido verificada uma aderência à distribuição Binomial Negativa e os resultados indicaram um alto índice de disponibilidade de vagas, com probabilidade de se encontrar uma ou mais vagas desocupadas de 93 a 99%.

Os resultados estão mostrados nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Rua Miller

<table>
<tr><th>Número de vagas desocupadas</th><th colspan="2">Frequência observada
(f_i)</th><th colspan="2">Frequência teórica (Binomial Negativa)
(F_i)</th><th>$(f_i)^2/F_i$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>12</td><td></td><td>8,90176</td><td></td><td>16,1766</td></tr>
<tr><td>1</td><td>16</td><td></td><td>17,3366</td><td></td><td>14,7665</td></tr>
<tr><td>2</td><td>22</td><td></td><td>20,8390</td><td></td><td>23,2257</td></tr>
<tr><td>3</td><td>13</td><td></td><td>19,8703</td><td></td><td>8,50518</td></tr>
<tr><td>4</td><td>15</td><td></td><td>16,4776</td><td></td><td>13,6549</td></tr>
<tr><td>5</td><td>16</td><td></td><td>12,4358</td><td></td><td>20,5857</td></tr>
<tr><td>6</td><td>10</td><td></td><td>8,76732</td><td></td><td>11,4060</td></tr>
<tr><td>7</td><td>6</td><td></td><td>5,86977</td><td></td><td>6,13312</td></tr>
<tr><td>8</td><td>7</td><td rowspan="13">10</td><td>3,77355</td><td rowspan="13">9,50195</td><td rowspan="13">10,5241</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0</td><td>2,34780</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td><td>1,42183</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0</td><td>0,84179</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0</td><td>0,48887</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1</td><td>0,27924</td></tr>
<tr><td>14</td><td>0</td><td>0,15721</td></tr>
<tr><td>15</td><td>0</td><td>0,08740</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0</td><td>0,04804</td></tr>
<tr><td>17</td><td>0</td><td>0,02614</td></tr>
<tr><td>18</td><td>0</td><td>0,01410</td></tr>
<tr><td>19</td><td>0</td><td>0,00754</td></tr>
<tr><td>≥ 20</td><td>0</td><td>0,00842</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>120</td><td></td><td>120</td><td></td><td>124,9780</td></tr>
</table>

Tabela 4 – Rua Conselheiro Belisário

Número de vagas desocupadas	Frequência observada (f_i)		Frequência teórica (Binomial Negativa) (F_i)		$(f_i)^2/F_i$
0	2	12	0,16202	6,9104	20,83815
1	4		0,77435		
2	3		2,04283		
3	3		3,93120		
4	3		6,16223		1,46051
5	4		8,33995		1,91848
6	9		10,0968		8,02237
7	11		11,1942		10,8092
8	10		11,5548		8,65443
9	11		11,2398		10,7654
10	11		10,3985		11,6363
11	12		9,21541		15,6260
12	9		7,86793		10,2950
13	5		6,50150		3,84527
14	7		5,2194		9,38805
15	4	16	4,08369	15,2992	16,73290
16	3		3,12224		
17	5		2,33799		
18	3		1,71801		
19	1		1,24092		
≥ 20	0		2,79635		
Total	**120**		**120**		**129,9920**

Os resultados dos cálculos efetuados, utilizando-se as expressões (1) para média m, (3) para a variância s^2, (8) para o Qui-quadrado da amostra χ^2, (22) para o grau de liberdade $g.l.$ e (21) para a probabilidade de haver uma ou mais vagas desocupadas $P(x \geq 1)$, estão localizados na Tabela 5:

Tabela 5 – Resultados

Local	Vagas úteis	m	s^2	s^2/m	χ^2	g	$g.l.$	$\chi^2_{0,05}$	$P(x \geq 1)$
Miller	58	3,58	6,59	1,84	4,98	9	6	12,6	0,93
Belisário	43	9,50	18,88	1,99	9,99	13	10	18,3	0,99

Engº: Sun Hsien Ming
CTA 5 – Gerência de Sistemas de Controle de Tráfego – GSC